XXXI SEMANA NACIONAL DE INVESTIGACIÓN Y DOCENCIA EN MATEMÁTICAS

Curvas de Bézier

José Luis Aguilera Luzania   Jesús Armando Báez Camacho

Dr. Roberto Núñez González

Introducción

Todas las líneas, sean rectas o curvas, se pueden definir como funciones. La función para dibujar una línea recta es simple, pero en el caso de las líneas curvas las funciones suelen ser más complicadas. Ahora, para el despliegue de curvas en un dispositivo gráfico es deseable que estas funciones se puedan evaluar de manera precisa y rápida para dibujarlas.

Cierto tipo de curvas, llamadas **“Curvas de Bézier Simples”**, tienen la característica de que son representadas por funciones que se pueden evaluar de manera eficiente en una computadora. Llevan este nombre por Pierre Bézier, quien fue el responsable en darlas a conocer (publicó su investigación en 1962) como las curvas perfectas para ser implementadas para el trazado de dibujos técnicos, diseño aeronáutico y de automóviles.

Estas curvas, en esencia, son una combinación lineal de **"Polinomios de Bernstein"** los cuales se dieron a conocer en 1912.

Estructura

Una curva de Bézier es una curva polinomial que aproxima a una serie de puntos llamados "puntos de control". Esta curva puede ser de cualquier grado, y podemos decir que de una curva de grado n aproxima a $n+1$ puntos de control.

Utilizando una forma paramétrica, las curvas de Bézier se pueden construir utilizando la expresión:

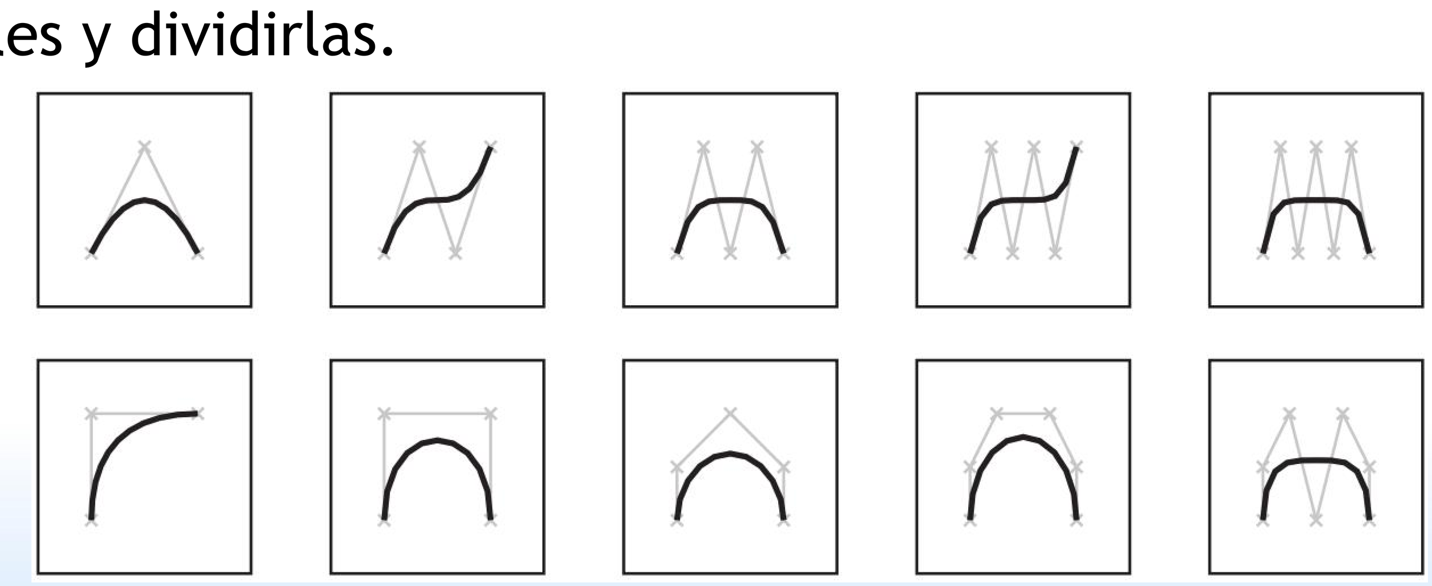
$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{u}) = \sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{p}_{\boldsymbol{k}}\ \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{u}),\ \text{donde}\ \ 0 \leq \boldsymbol{u} \leq \boldsymbol{1}$$

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{u}) = \sum_{k=0}^{n} \boldsymbol{p}_{\boldsymbol{k}}\ \boldsymbol{C}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{k})\ \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{k}}\ (\boldsymbol{1}-\boldsymbol{u})^{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k}}$$

donde $\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{u})$ son los polinomios de Bernstein, mientras que $p_k = (\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{k}})$ (si la curva es de $\mathbb{R}^2$) o $\boldsymbol{p}_{\boldsymbol{k}} = (\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{k}}, \boldsymbol{z}_{\boldsymbol{k}})$ (si la curva es de $\mathbb{R}^3$) son los puntos de control.

Propiedades útiles

- Las curvas esta delimitadas por la envoltura convexa *“convex hull”* de los puntos de control.
- Las curvas son simétricas: revertir el orden de los puntos de control produce la misma curva, con una parametrización inversa.
- Cualquier operación de traslación, escalado, rotación o sesgado aplicada a los puntos de control se aplica a la curva misma. (*affine invariant*).
- Existen muchos algoritmos para evaluar y subdividir curvas de Bézier en piezas pequeñas que a su vez son curvas de Bézier. Uno de ellos es el algoritmo de tipo ***dividir y conquistar***, llamado ***Algoritmos de Casteljau***, que se basa en usar interpolaciones lineales y dividirlas.

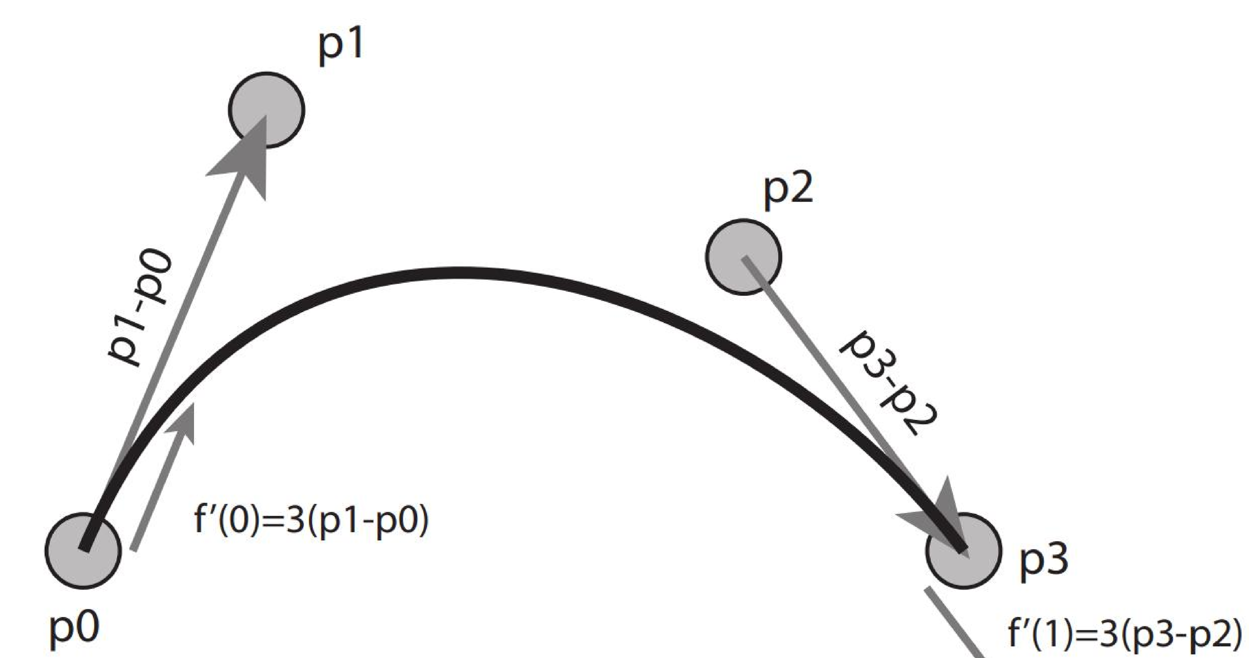


Ejemplo

Considere una curva de grado *n=3*. la curva tiene cuatro $(n+1)$ puntos de control (p_0, p_1, p_2, p_3). Comienza en el primer punto de control (p_0) y termina en el último punto (p_3).

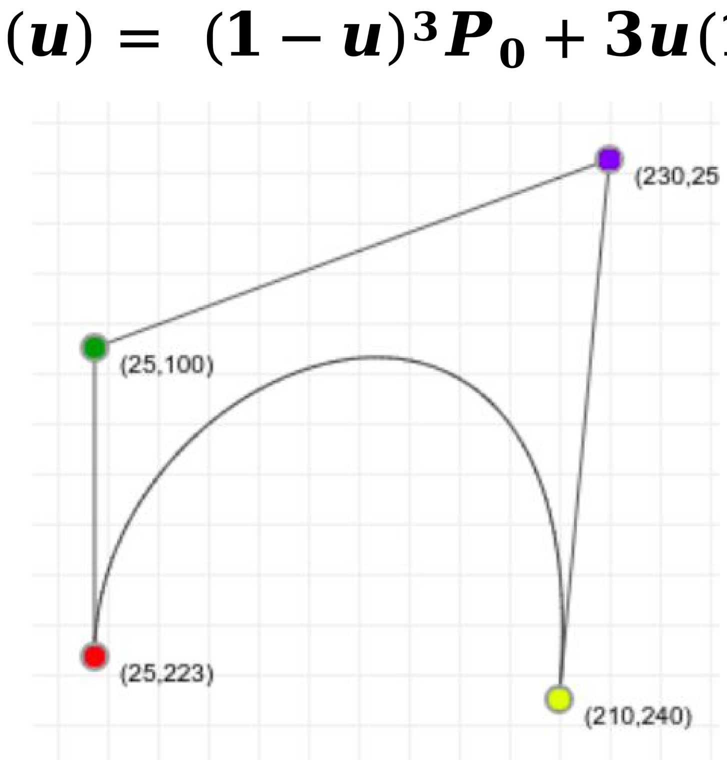
La primera derivada al inicio de la curva es proporcional al vector entre el primer y segundo punto de control $(p_1 - p_0)$. Específicamente, $f'(0) = 3(p_1 - p_0)$.

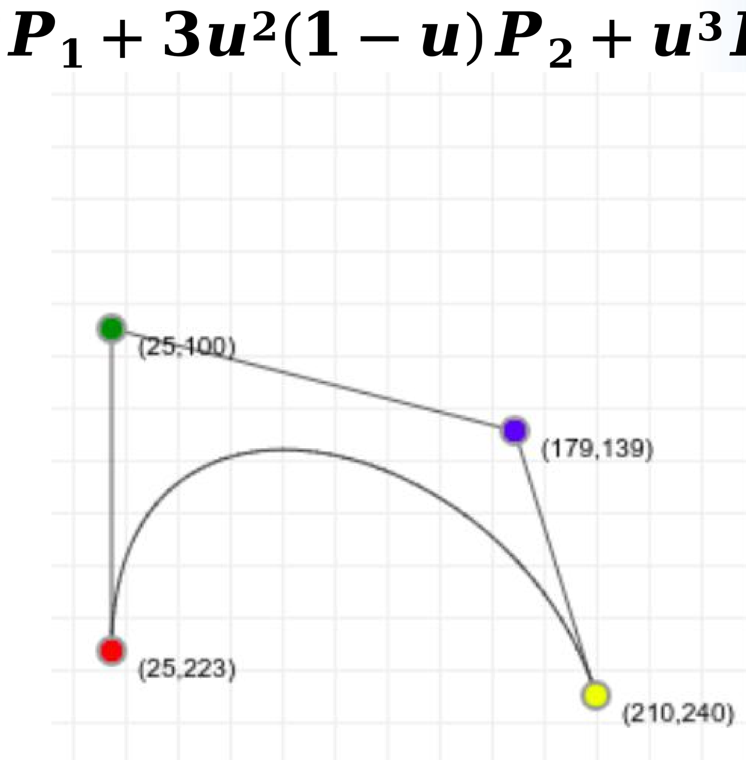
De forma similar, la primera derivada al final de la curva esta dada por $f'(1) = 3(p_3 - p_2)$.



Para este caso, dadas las posiciones de los puntos de control p_k, la función para evaluar una curva de Bézier de orden $n = 3$ (con $n+1$ puntos de control) es:

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{u}) = (\boldsymbol{1}-\boldsymbol{u})^{3}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{0}} + \boldsymbol{3u}(\boldsymbol{1}-\boldsymbol{u})^{2}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{1}} + \boldsymbol{3u}^{2}(\boldsymbol{1}-\boldsymbol{u})\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{2}} + \boldsymbol{u}^{3}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{3}}$$





Conclusiones

Utilizar curvas que sólo se aproximan a los puntos que la definen, hace que se pierda la capacidad de que la curva pase directamente por los mismos, sin embargo nos dá la libertad de controlar localmente la forma de la curva, mediante la manipulación de los puntos de control. Esta propiedad es de utilidad en áreas donde se desea diseñar con formas arbitrarias.

Las curvas de Bézier se utilizan en software de dibujo vectorial, como Flash, Illustrator, Inkscape, así como en programas de diseño como Photoshop o de diseño CAD. Esto es posible gracias al uso de algoritmos que son eficientes y rápidos para calcular curvas de Bézier en una computadora.

Referencias

1. Shirley, P., Ashikhmin, M., Marschner, S., Fundamentals of Computer Graphics (English Edition) (3.ª ed., pp. 365-370). A.K.Peters/CRC Press (2009).
2. A Primer to Bézier Curves. https://pomax.github.io/bezierinfo/index.html.
3. Cordero Valle, J.M., Cortés Parejo, J., Curvas y Superficies para Modelado Geométrico. Alfaomega (2003).